29-9-2014 (1)

Ορισμός

$E, \rho: E\times E \to \mathbb{R}^+$

α) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
β) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
γ) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

$\Rightarrow$ η ρ λέγεται μετρική στο E
(E,ρ) -"- μετρικός χώρος
$\rho(\alpha,\beta)$ -"- απόσταση του α και β

Πρόταση

Σε τυχόντα μετρικό χώρο (E,ρ) ισχύουν τα εξής:

i) $\rho(x,y)\geq 0$
ii) $|\rho(x,y)-\rho(z,w)|\leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$
iii) $|\rho(x,z)-\rho(z,y)|\leq \rho(x,y)$

x,y,z,w εν E

Απόδειξη Πρότασης

(i) $\rho(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)+\rho(x,y)}{2} \overset{(\beta)}{=} \dfrac{\rho(x,y)+\rho(y,x)}{2} \overset{(\gamma)}{\geq} \dfrac{\rho(x,x)}{2} \overset{(\alpha)}{=} 0$

(ii) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y) \Longleftrightarrow$
$\rho(x,y)-\rho(z,w)\leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$

$\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$ $(\mathbb{R}, |\ |)$: Ευκλείδιος μετρικός χώρος

Παράδειγμα

Διακριτός μ.χ.
$E\neq\emptyset$
$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$
με $\rho: E\times E\to\mathbb{R}$

είναι μετρική αφού γιατί ισχύουν τα (α), (β), (γ).
$\to$ Τα (α) και (β) ισχύουν προφανώς.
Για το (γ): Έστω $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ ισχύει τότε εκτός αν
$\rho(x,y)=1$ και $\rho(x,z)=\rho(z,y)=0$
$\Longrightarrow x=z \wedge z=y \Longrightarrow x=y$
άρα ΑΤΟΠΟ

E, διαν. χώρος ($\mathbb{R}$)

$N : E \to \mathbb{R}$

$N(x) = 0 \iff x = 0$

$N(ax) = |a|\, N(x) \quad a \in \mathbb{R} \wedge x \in E$

$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

<u>Παράδειγμα</u>

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

$a(x,y) = (ax, ay)$

$N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leftarrow$ η στάθμη για τον $\mathbb{R}^2$

<u>Πρόταση</u>

Αν N είναι μια στάθμη σ' ένα δ.χ E τότε η συνάρτηση $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x,y) = N(x-y)$ ορίζει μετρική στο E

<u>Απόδειξη</u>

$\rho(x,y) = 0 \iff N(x-y) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

$\rho(x,y) = N(x-y) \overset{(*)}{=} N(y-x) = \rho(y,x)$

$\rho(x,y) = N(x-y) = N[(x-z)+(z-y)] \leq$
$\leq N(x-z) + N(z-y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

<u>(*)</u>

$N(-z) = N((-1)z) = |-1|\, N(z) = N(z)$

$(\mathbb{R}, |\ |)$

$(\mathbb{R}, \rho) \quad \rho(x,y) = |x-y|$

∘ $(\mathbb{R}^2, \|\ \|)$ είναι σταθμικός διαν. χώρος διάστασης 2 με στάθμη

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$(\mathbb{R}^2, \rho) : \rho((x,y),(z,w)) = \|(x,y)-(z,w)\| = \|(x-z, y-w)\| = \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}$

$\mathbb{R}^n \ni \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (3)

$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ σταθερή

Παραδείγματα

$N_1(\vec{x}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \to \rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$

$N_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \to \rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (post metric)